

轮趣科技

轮式移动机器人的运动学模型

推荐关注我们的公众号获取更新资料



版本说明:

版本	日期	内容说明
V1.0	2024/09/01	第一次发布

网址: www.wheeltec.net

目 录

1. 前言	3
2. 两轮差速小车	3
2.1 逆运动学模型	4
2.2 正运动学模型	5
3. 阿克曼小车	5
3.1 逆运动学模型	6
3.2 正运动学模型	7
4. 四轮驱动小车	8
4.1 正运动学模型	9
4.2 逆运动学模型	12
5. 麦克纳姆轮小车	13
5.1 逆运动学模型	13
5.2 正运动学模型	16
6. 全向轮小车	17
6.1 逆运动学模型	18
6.2 正运动学模型	20
7. 应用示例	20
8. 附录	24
8.1 关于转向机构（无反馈）	24
8.2 关于转向机构（带反馈）	26

1. 前言

运动学是研究物体运动的几何方面的学科，它是力学的一个分支。运动学专注于描述和测量位置的变化，而不涉及是什么原因导致了这种运动。运动学是描述和理解机器人运动的基础，为更进一步的动力学分析以及控制系统的设计提供了必要的信息，因此，对机器人的运动学分析是有意义的。

2. 两轮差速小车

两轮差速小车是常见的轮式机器人之一，它由两个共轴的独立驱动轮和轴线之外的一个从动轮组成。它的控制最为简单，即通过控制两个轮子的转速差来实现直行运动和转向运动。



图 2-1 两轮差速小车的实物图

下面对两轮差速小车进行运动学分析，建立运动学模型。为了易于说明，建立如图 2-2 所示的坐标系，其中坐标原点为驱动轮转轴的中心。

表 2-1 符号说明

W	驱动轮轮距(m)
v	小车的前进速度(m/s)
ω	小车的转向速度(rad/s)
v_L	左轮的前进速度(m/s)
v_R	右轮的前进速度(m/s)

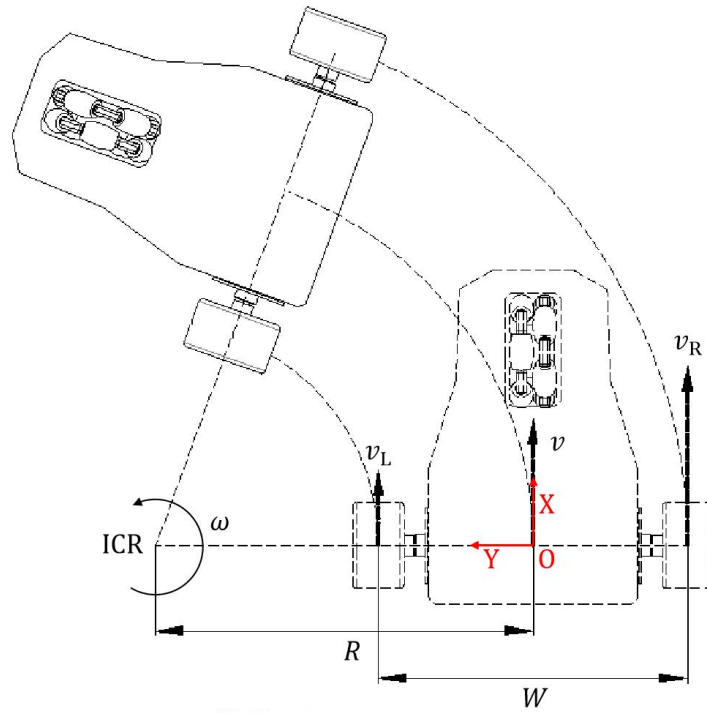


图 2-2 两轮差速小车的运动学模型

(1) 当 $v_L = v_R$ 的时候，小车做直线运动，此时，有

$$\begin{cases} v_{\text{translation}} = v_L = v_R \\ \omega_{\text{translation}} = 0 \end{cases} \quad (2-1)$$

(2) 当 $v_L = -v_R$ 的时候，小车绕 O 点做自转运动，此时，有

$$\begin{cases} v_{\text{rotation}} = 0 \\ \omega_{\text{rotation}} = -\frac{v_L}{W/2} = \frac{v_R}{W/2} \end{cases} \quad (2-2)$$

2.1 逆运动学模型

综合式(2-1)和式(2-2)，可知当小车做纯平动的时候，有

$$\begin{cases} v_L = v \\ v_R = v \end{cases} \quad (2-3)$$

当小车做纯转动的时候，有

$$\begin{cases} v_L = -\omega \frac{W}{2} \\ v_R = \omega \frac{W}{2} \end{cases} \quad (2-4)$$

而任意的运动可以看成是平动和转动的叠加，因此，可得差速小车的逆运动学方程（在局部坐标系下）为

$$\begin{pmatrix} v_L \\ v_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{W}{2} \\ 1 & \frac{W}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} \quad (2-5)$$

2.2 正运动学模型

显然，在式(2-5)中 $W \neq 0$ ，故有正运动学方程（在局部坐标系下）为

$$\begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{W}{2} \\ 1 & \frac{W}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v_L \\ v_R \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{W} & \frac{1}{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_L \\ v_R \end{pmatrix} \quad (2-6)$$

3. 阿克曼小车

阿克曼小车是一种依据阿克曼转向几何(Ackermann Steering Geometry)设计的车辆。其要求在视机器人系统为刚体、无侧向力的前提下，所有车轮必须绕同一瞬时转向中心(ICR)做圆周运动，此即阿克曼转向原理。

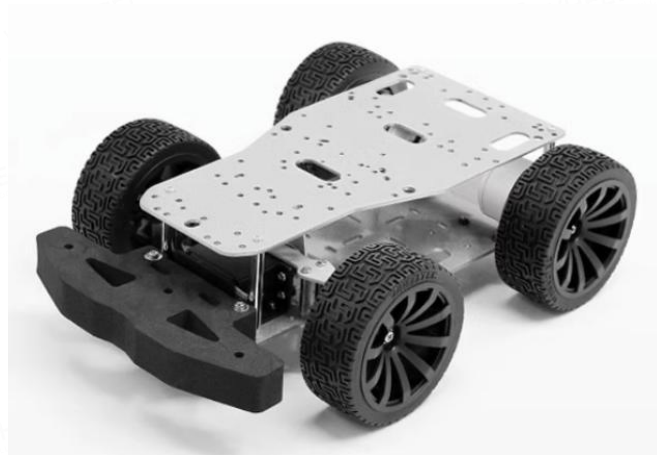


图 3-1 阿克曼小车的实物图

接下来，对阿克曼小车进行运动学分析，建立运动学模型。为了易于说明，建立如图 3-2 所示的坐标系，其中坐标原点为后轮转轴的中心。

表 3-1 符号说明

K	转向主销中心距(m)
-----	------------

W	小车的轮距(m)
L	小车的轴距(m)
v	小车的前进速度(m/s)
ω	小车的转向速度(rad/s)
v_L	左后轮的前进速度(m/s)
v_R	右后轮的前进速度(m/s)
R	小车的转弯半径(m)

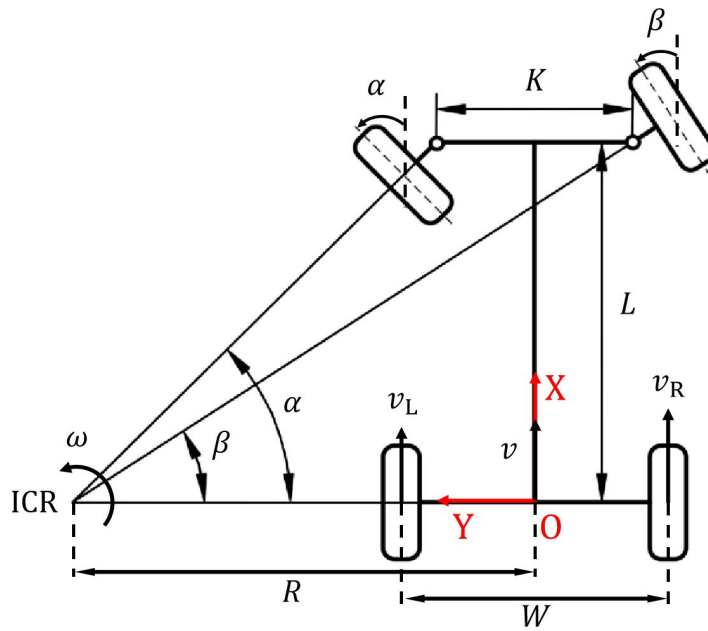


图 3-2 阿克曼小车的运动学模型

3.1 逆运动学模型

在阿克曼小车的运动学分析中,逆运动学分析是指已知小车的运动状态的前提下,求解两个驱动轮的前进速度以及两个前轮的转角。

对于满足阿克曼转向几何关系的转向机构而言,有

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{L}{R - K/2} \\ \tan \beta = \frac{L}{R + K/2} \end{cases} \quad (3-1)$$

化简得

$$\cot \beta - \cot \alpha = \frac{K}{L} \quad (3-2)$$

上式称为理想的内外轮转角关系,则在理想情况下,只需控制其中一个前轮的转

角，另一个前轮的转角也因此确定。这里选择左前轮的转角 α 作为控制量，那么逆运动学问题可以重新表述为在已知小车的运动状态($v \quad \omega$)的前提下，求解($v_L \quad v_R \quad \alpha$)。

假设小车的前进速度为 v ，小车的转向速为 ω ，则转向半径为 $R = v/\omega$ ，进一步的，由(3-1)可得

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{L}{\frac{v}{\omega} - \frac{K}{2}} \right) \quad (3-3)$$

另一方面，由图 3-2 所示的几何关系易知

$$\begin{cases} v_L = \omega \left(R - \frac{W}{2} \right) = v - \omega \frac{W}{2} \\ v_R = \omega \left(R + \frac{W}{2} \right) = v + \omega \frac{W}{2} \end{cases} \quad (3-4)$$

综上，式(3-3)和式(3-4)即为阿克曼小车的逆运动学方程（在局部坐标系下）。

3.2 正运动学模型

和逆运动学分析相反，正运动学分析是指在已知控制量($v_L \quad v_R \quad \alpha$)的前提下，求解小车的运动状态($v \quad \omega$)。（值得注意的是，控制量是有冗余的，即这三个控制量不是完全独立的）

由式 (3-1)可知，转向半径

$$R = \frac{L}{\tan \alpha} + \frac{K}{2} \quad (3-5)$$

另一方面，由 (3-4)可知，小车的前进速度为

$$v = \frac{v_L + v_R}{2} \quad (3-6)$$

则小车的转向速度为

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{v_L + v_R}{\frac{2L}{\tan \alpha} + K} \quad (3-7)$$

也可以通过由(3-4)解得

$$\omega = \frac{v_R - v_L}{W} \quad (3-8)$$

综上，式(3-6)至式(3-8)即为阿克曼小车的正运动学方程（在局部坐标系下）。

4. 四轮驱动小车

四轮驱动小车是指在整个行驶过程中一直保持着四轮驱动形式的普通轮式小车（非全向轮），因为其出色的越障能力，使得其在野外非机构化场景中有着广泛的应用。



图 4-1 四轮驱动小车的实物图

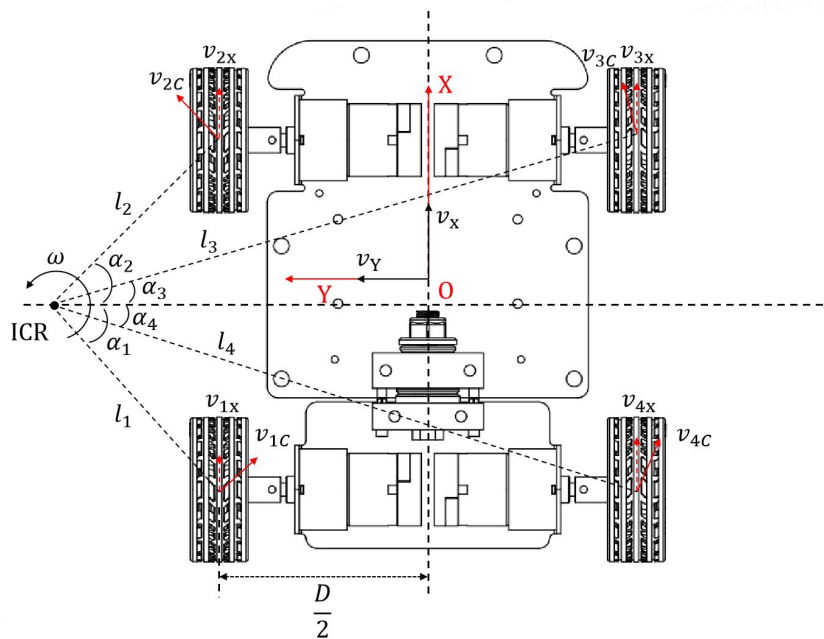


图 4-2 四轮驱动小车的运动状态

在进行运动学分析之前，先考察一下四轮驱动小车的特点。如图 4-2 所示，给定小车的运动状态，可以容易求得理想情况下四个车轮质心的速度。这里只考虑它们的纵向分速度，有

$$\begin{cases} v_{1x} = v_{1c} \cos \alpha_1 = \omega l_1 \cos \alpha_1 = \omega \left(y_{ICR} - \frac{D}{2} \right) \\ v_{2x} = v_{2c} \cos \alpha_2 = \omega l_2 \cos \alpha_2 = \omega \left(y_{ICR} - \frac{D}{2} \right) \\ v_{3x} = v_{3c} \cos \alpha_3 = \omega l_3 \cos \alpha_3 = \omega \left(y_{ICR} + \frac{D}{2} \right) \\ v_{4x} = v_{4c} \cos \alpha_4 = \omega l_4 \cos \alpha_4 = \omega \left(y_{ICR} + \frac{D}{2} \right) \end{cases} \quad (4-1)$$

其中

l_i 第*i*个车轮质心到车体瞬时转向中心的距离(m)

v_{ic} 第*i*个车轮质心的速度(m/s)

ω 小车的转向速度(rad/s)

D 小车的轮距(m)

可以看出，同侧车轮质心的纵向速度是相等的，基于这个特点以及简化模型的需要，我们做出如下的假设：

- (1) 小车视为刚体并且车体的质心与几何中心重合（不一定和旋转中心重合）；
- (2) 小车在平面上运动；
- (3) 同侧电机的转速相同，为了易于表示，记左侧电机的转速为 v_L ，右侧电机的转速为 v_R 。

4.1 正运动学模型

在滑动转向车辆（四驱车是滑动转向车辆的一种）的运动学分析中，正运动学分析是指已知四个车轮对应电机的转速求解小车的运动状态。

表 4-1 符号说明

v_X	小车的前向移动速度(m/s)
v_Y	小车的侧向移动速度(m/s)
ω	小车的转向速度(rad/s)
D	小车的轮距(m)
R	小车的转弯半径(m)
v_L	左侧电机的转速，也即低速侧轮胎接地段的相对速度(m/s)
v_R	右侧电机的转速，也即高速侧轮胎接地段的相对速度(m/s)
v_{AL}	低速侧轮胎接地段的绝对速度(m/s)

v_{AR}	高速侧轮胎接地段的绝对速度(m/s)
v_{iY}	各轮胎接地段的侧向线速度(m/s)
v_{iy}	第 <i>i</i> 个车轮质心的侧向线速度(m/s)
v_{ix}	第 <i>i</i> 个车轮质心的纵向线速度(m/s)
v_{ic}	第 <i>i</i> 个车轮质心的速度(m/s)
ICR	车体的瞬时转向中心
ICR_L	低速侧轮胎接地段的瞬时转向中心
ICR_R	高速侧轮胎接地段的瞬时转向中心

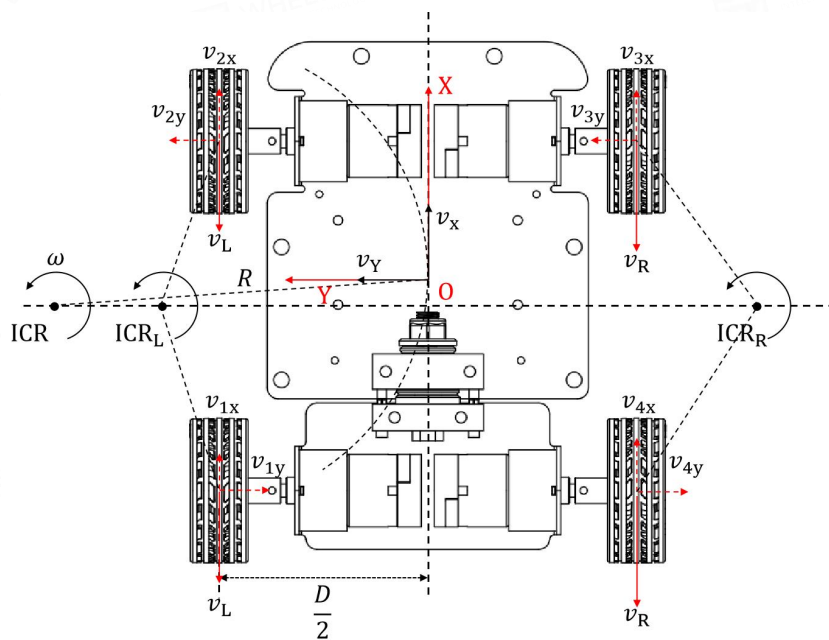


图 4-3 基于瞬心法的四驱车运动学模型（以左转为例）

首先，建立如图 4-3 所示的坐标系。在这个坐标系下，我们设

$$\begin{cases} ICR = (x_G, y_G) \\ ICR_L = (x_L, y_L) \\ ICR_R = (x_R, y_R) \end{cases} \quad (4-2)$$

滑动转向车辆转向时，车体可以看成是绕瞬时转向中心 ICR 旋转的平面运动，瞬时转向中心 ICR 到小车质心的距离为转向半径 R 。而两侧轮胎的运动由牵连速度和相对速度组成，前者指轮胎随车体运动的速度，后者指相对于车体的旋转速度（轮胎上的点的运动可以看成是由随轮胎质心的平动和绕轮胎质心的转动叠加而成）。一般情况下，在转向的时候，低速侧轮胎总是作用着制动力，故低速侧轮胎接地段总是滑移($v_L < v_{1x, 2x}$)，而高速侧轮胎总是作用着牵引力，故高速侧

轮胎接地段总是滑转($v_R > v_{3x, 4x}$)。

接下来，考察车轮质心的侧向线速度 v_{iy} 与各轮胎接地段的侧向线速度 v_{iY} 的关系。为了易于表示，设各车轮质心的平面坐标为 (x_i, y_i) 。由图 4-1 易知

$$\begin{cases} v_{1y} = v_{1c} \sin \alpha_1 = \omega l_1 \sin \alpha_1 = \omega(-x_1 + x_G) \\ v_{2y} = v_{2c} \sin \alpha_2 = \omega l_2 \sin \alpha_2 = \omega(x_2 - x_G) \\ v_{3y} = v_{3c} \sin \alpha_3 = \omega l_3 \sin \alpha_3 = \omega(x_3 - x_G) \\ v_{4y} = v_{4c} \sin \alpha_4 = \omega l_4 \sin \alpha_4 = \omega(-x_4 + x_G) \end{cases} \quad (4-3)$$

另一方面，各轮胎接地段的侧向线速度为

$$\begin{cases} v_{1Y} = \omega(-x_1 + x_L) \\ v_{2Y} = \omega(x_2 - x_L) \\ v_{3Y} = \omega(x_3 - x_R) \\ v_{4Y} = \omega(-x_4 + x_R) \end{cases} \quad (4-4)$$

由于各轮胎接地段的侧向速度与对应的车轮质心的侧向速度相等（倘若不相等，则车轮会离开轮毂），则对比式 (4-3) 和式 (4-4) 可得 $x_G = x_L = x_R$ 。另一方面， $x_G = -v_Y/\omega$ ，则（所以图 4-3 的三个瞬时转向中心在同一直线上）

$$x_G = x_L = x_R = -\frac{v_Y}{\omega} \quad (4-5)$$

最后，考察车轮质心的纵向线速度与各轮胎接地段的纵向线速度的关系。由模型假设可知，同侧电机的转速相同，左侧电机的转速为 v_L ，右侧电机的转速为 v_R 。两侧轮胎的运动由牵连速度和相对速度组成，即

$$\begin{cases} v_{AL} = v_{ix} - v_L, i = 1, 2. \\ v_{AR} = v_{ix} - v_R, i = 3, 4. \end{cases} \quad (4-6)$$

另一方面，轮胎接地段可以看作是绕瞬时旋转中心的旋转运动（这里可以简单的这样理解，以 v_{AL} 为例，令 $v_L = \omega r$ ，则 $v_{AL} = v_{ix} - v_L = \omega(y_G - D/2 - r), i = 1, 2.$ ），所以有

$$\begin{cases} v_X = \omega \cdot y_G \\ v_{AL} = \omega \left(y_L - \frac{D}{2} \right) \\ v_{AR} = \omega \left(y_R + \frac{D}{2} \right) \\ v_{ix} = \omega \left(y_G - \frac{D}{2} \right), i = 1, 2. \\ v_{ix} = \omega \left(y_G + \frac{D}{2} \right), i = 3, 4. \end{cases} \quad (4-7)$$

联立式 (4-6) 和 (4-7) 可得

$$\begin{cases} y_G = \frac{v_X}{\omega} \\ y_L = \frac{v_X - v_L}{\omega} \\ y_R = \frac{v_X - v_R}{\omega} \end{cases} \quad (4-8)$$

联立式 (4-5) 和 (4-8) 可得

$$\begin{cases} v_X = \frac{y_L v_R - y_R v_L}{y_L - y_R} \\ v_Y = \frac{v_L - v_R}{y_L - y_R} \cdot x_G \\ \omega = -\frac{v_L - v_R}{y_L - y_R} \end{cases} \quad (4-9)$$

由于四轮驱动小车结构的对称, 有 $y_R = -y_L = -y$, 则式 (4-9) 可写成

$$\begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{x_G}{2y} & -\frac{x_G}{2y} \\ -\frac{1}{2y} & \frac{1}{2y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_L \\ v_R \end{pmatrix} \quad (4-10)$$

上式即为四轮驱动小车的正运动学方程 (在局部坐标系下)。

4.2 逆运动学模型

和正运动学分析相反, 逆运动学分析是指已知小车的运动状态求解四个车轮对应电机的转速。由于在实际操作中, 我们只考虑 v_X 和 ω , 另一方面, v_Y 并不是能控制的量, 因此这里不妨假设 v_Y 比较小, 忽略它的影响, 则式 (4-10) 变为

$$\begin{pmatrix} v_X \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2y} & \frac{1}{2y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_L \\ v_R \end{pmatrix} \quad (4-11)$$

故

$$\begin{pmatrix} v_L \\ v_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -y \\ 1 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_X \\ \omega \end{pmatrix} \quad (4-12)$$

其中 y 是瞬时转向中心的纵坐标, 需要根据实验进行参数调试整定。上式说明在忽略 v_Y 的情况下可以与两轮差速小车等价。

5. 麦克纳姆轮小车

麦克纳姆轮(Mecanum Wheel), 又称为艾隆轮(Ilon Wheel), 是一种全向轮。其由轮毂和固定在外周的许多小辊子构成, 轮轴和辊轴之间的夹角通常为 45° 。每个轮子具有 3 个自由度, 分别是绕轮轴转动, 沿垂直于与地面接触的辊子的轴心方向移动, 绕轮子和地面的接触点转动。根据机械原理, 机构的原动件数应该等于机构的自由度, 因此, 若要实现 3 个自由度的控制, 则应该有 3 个独立的输入。而每个麦克纳姆轮可以看作 1 个原动件, 因此, 若要实现平面 3 个自由度的控制, 就应该至少有 3 个麦克纳姆轮。也就是说, 理论上只要有 3 个这样的轮子组成的移动平台便可实现全向移动。但是, 在实际应用中, 麦克纳姆轮都是成对使用的, 2 个左旋轮, 2 个右旋轮, 其中左旋轮和右旋轮呈手性对称, 这样既可以增加机构的稳定性, 又方便控制, 同时还提升了载重能力。



图 5-1 麦克纳姆轮的实物图

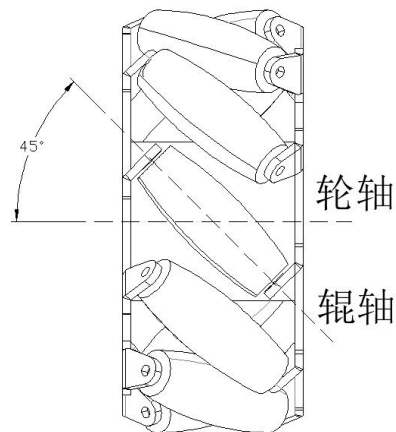


图 5-2 麦克纳姆轮的轮轴和辊轴

下面对麦克纳姆轮小车进行运动学分析, 建立运动学模型。为了简化模型, 做出如下三点假设:

- (1) 小车是刚体;
- (2) 小车的运动局限在平面上, 忽略地面的凹凸不平及其带来的影响;
- (3) 车轮不与地面打滑。

5.1 逆运动学模型

在麦克纳姆轮小车的运动学分析中, 逆运动学分析是指已知小车的运动状态求解 4 个车轮对应的电机的转速。为了易于说明, 建立如图 5-4 所示的坐标系,

这里，先对图中的符号进行说明：

表 5-1 符号说明

v_X	小车的前向移动速度(m/s)
v_Y	小车的侧向移动速度(m/s)
ω	小车的角速度(rad/s)
v_{ix}	第 i 个车轮的线速度(m/s)
v_{ir}	第 i 个车轮与地面接触的辊子的线速度(m/s)
$v_{i\omega}$	小车的转动在第 i 个车轮产生的速度分量(m/s)
α_i	第 i 个车轮的中心与 O 的连线与 X 轴的夹角(rad)
β_i	第 i 个车轮的辊轴与 X 轴的夹角(rad)
L	车轮的中心与 O 的距离(m)
H	前后两车轮的距离（轴距）的一半(m)
W	左右两车轮的距离（轮距）的一半(m)

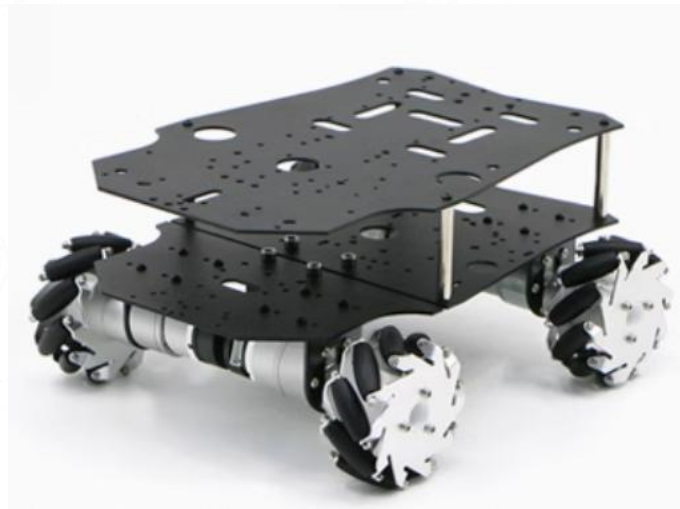


图 5-3 四轮驱动小车的实物图

对于任一车轮而言，其运动状态为 v_{ix} , v_{ir} 两者共同决定。另一方面，由于小车是刚体，则车体的运动状态和车轮的运动状态应该一致。而车体的运动状态又由 v_X , v_Y 和 ω 三者共同决定。则

在 X 方向上，有

$$v_X + v_{i\omega} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_i\right) = v_{ix} + v_{ir} \cos \beta_i \quad (5-1)$$

在 Y 方向上，有

$$v_Y + v_{i\omega} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_i\right) = v_{ir} \sin \beta_i \quad (5-2)$$

其中

$$v_{i\omega} = \omega L \quad (5-3)$$

联立上式可得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -L \sin \alpha_i \\ 0 & 1 & L \cos \alpha_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta_i & 1 \\ \sin \beta_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{ir} \\ v_{iX} \end{pmatrix} \quad (5-4)$$

即

$$\begin{pmatrix} v_{ir} \\ v_{iX} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta_i & 1 \\ \sin \beta_i & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -L \sin \alpha_i \\ 0 & 1 & L \cos \alpha_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \\ \omega \end{pmatrix} \quad (5-5)$$

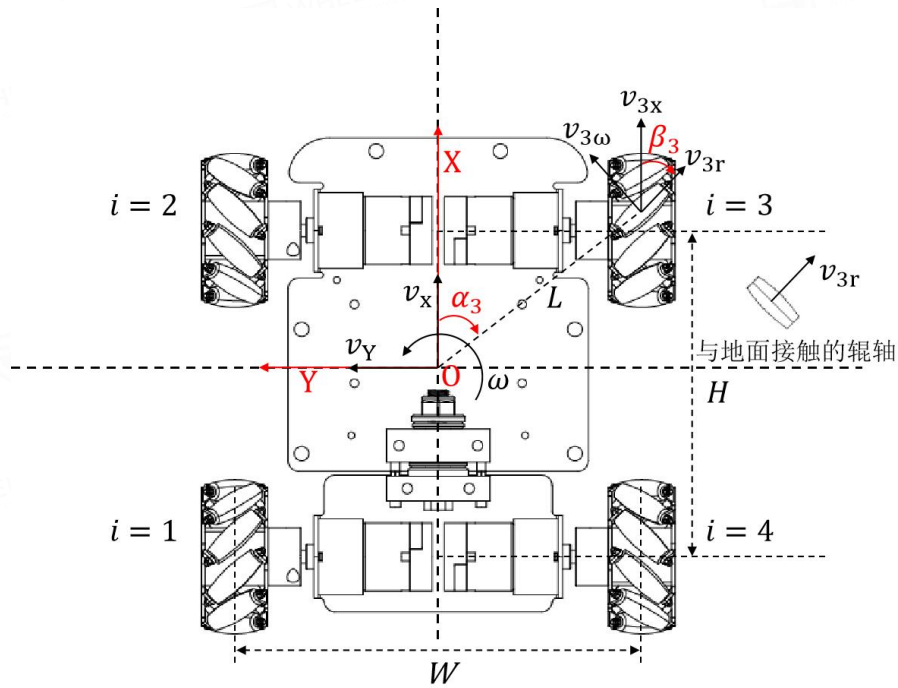


图 5-4 麦克纳姆轮小车的运动学模型（俯视图）

只关注 v_{iX} 这一项，有 $v_{iX} = v_X - v_Y \cot \beta_i - \omega L(\sin \alpha_i + \cos \alpha_i \cot \beta_i)$ 。那么，对于 4 个车轮($i = 1, 2, 3, 4$)，有

$$\begin{pmatrix} v_{1X} \\ v_{2X} \\ v_{3X} \\ v_{4X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\cot \beta_1 & -L(\sin \alpha_1 + \cos \alpha_1 \cot \beta_1) \\ 1 & -\cot \beta_2 & -L(\sin \alpha_2 + \cos \alpha_2 \cot \beta_2) \\ 1 & -\cot \beta_3 & -L(\sin \alpha_3 + \cos \alpha_3 \cot \beta_3) \\ 1 & -\cot \beta_4 & -L(\sin \alpha_4 + \cos \alpha_4 \cot \beta_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \\ \omega \end{pmatrix} \quad (5-6)$$

通常情况下，参数 α_i 和 β_i 取为

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{3}{4}\pi, \beta_1 = -\frac{1}{4}\pi \\ \alpha_2 = \frac{1}{4}\pi, \beta_2 = \frac{1}{4}\pi \\ \alpha_3 = -\frac{1}{4}\pi, \beta_3 = -\frac{1}{4}\pi \\ \alpha_4 = -\frac{3}{4}\pi, \beta_4 = \frac{1}{4}\pi \end{cases}$$

则式(5-6)变为

$$\begin{pmatrix} v_{1X} \\ v_{2X} \\ v_{3X} \\ v_{4X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\left(\frac{H}{2} + \frac{W}{2}\right) \\ 1 & -1 & -\left(\frac{H}{2} + \frac{W}{2}\right) \\ 1 & 1 & \left(\frac{H}{2} + \frac{W}{2}\right) \\ 1 & -1 & \left(\frac{H}{2} + \frac{W}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \\ \omega \end{pmatrix} \quad (5-7)$$

综上，式(5-7)即为麦克纳姆轮小车的逆运动学方程（在局部坐标系下）。

5.2 正运动学模型

与逆运动学分析相反，正运动学分析是指已知4个车轮对应的电机的转速，求解小车的运动状态。令式(5-7)中的系数矩阵为 T ，即

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\left(\frac{H}{2} + \frac{W}{2}\right) \\ 1 & -1 & -\left(\frac{H}{2} + \frac{W}{2}\right) \\ 1 & 1 & \left(\frac{H}{2} + \frac{W}{2}\right) \\ 1 & -1 & \left(\frac{H}{2} + \frac{W}{2}\right) \end{pmatrix}$$

则式(5-7)可以写为

$$\begin{pmatrix} v_{1X} \\ v_{2X} \\ v_{3X} \\ v_{4X} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \\ \omega \end{pmatrix}$$

两边同时左乘 T^T ，可得

$$T^T \begin{pmatrix} v_{1X} \\ v_{2X} \\ v_{3X} \\ v_{4X} \end{pmatrix} = T^T T \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \\ \omega \end{pmatrix} \quad (5-8)$$

由于 $\text{rank}(T^T T) = \text{rank}(T) = 3$ ，所以，矩阵 $T^T T$ 存在逆矩阵。那么，两边同时左乘 $(T^T T)^{-1}$ ，可得

$$\begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \\ \omega \end{pmatrix} = (T^T T)^{-1} T^T \begin{pmatrix} v_{1X} \\ v_{2X} \\ v_{3X} \\ v_{4X} \end{pmatrix} \quad (5-9)$$

即

$$\begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \\ \omega \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1X} \\ v_{2X} \\ v_{3X} \\ v_{4X} \end{pmatrix} \quad (5-10)$$

上式即为麦克纳姆轮小车的正运动学方程（在局部坐标系下）。

6. 全向轮小车

全向轮(Omni Wheel)能够在一个平面上自由的向任意指定方向移动。能达到这种效果，主要归因于围绕轮毂圆周排布的一圈或多圈的辊子。这种结构的设计使得它既可以像普通轮子一样沿轮毂转动的方向运动，称为主滚动方向，又可以沿着垂直于主滚动方向的方向进行运动，称为第二滚动方向。这两种运动方向的结合使得其能在平面上自由的向任意指定方向移动。通常情况下，使用 3 个这样的全向轮搭建的小车就可以实现在平面上的全向移动。



图 6-1 全向轮的实物图

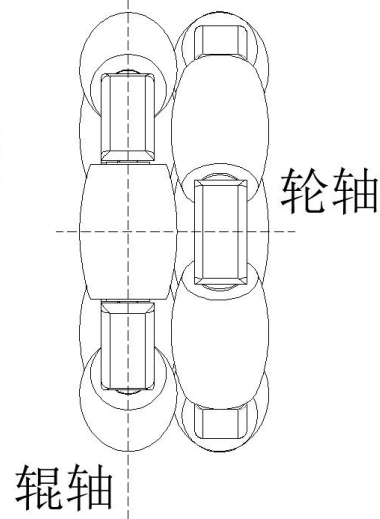


图 6-2 全向轮的轮轴和辊轴

下面对全向轮小车进行运动学分析，建立运动学模型。为了简化模型，做出如下三点假设：

- (1) 小车是刚体；
- (2) 小车的运动局限在平面上，忽略地面的凹凸不平及其带来的影响；
- (3) 车轮不与地面打滑。



图 6-3 全向轮小车的实物图

6.1 逆运动学模型

在全向轮小车的运动学分析中，逆运动学分析是指已知小车的运动状态求解 3 个车轮对应的电机的转速。为了易于说明，建立如图 6-4 所示的坐标系，这里，先对图中的符号进行说明：

表 6-1 符号说明

v_x	小车的前向移动速度(m/s)
v_y	小车的侧向移动速度(m/s)
ω	小车的角速度(rad/s)
v_i	第 <i>i</i> 个车轮的线速度(m/s)
v_{ir}	第 <i>i</i> 个车轮与地面接触的辊子的线速度(m/s)
$v_{i\omega}$	小车的转动在第 <i>i</i> 个车轮产生的速度分量(m/s)
α_i	第 <i>i</i> 个车轮的中心与 O 的连线与 X 轴的夹角(rad)
R	圆盘的半径，亦即车轮的中心与 O 的距离(m)

对于任一车轮而言，其运动状态为 v_i , v_{ir} 两者共同决定。另一方面，由于小车是刚体，则车体的运动状态和车轮的运动状态应该一致。而车体的运动状态又由 v_x , v_y 和 ω 三者共同决定。则

在 X 方向上，有

$$v_X - v_{i\omega} \sin \alpha_i = -v_i \sin \alpha_i + v_{ir} \cos \alpha_i \quad (6-1)$$

在 Y 方向上，有

$$v_Y + v_{i\omega} \cos \alpha_i = v_i \cos \alpha_i + v_{ir} \sin \alpha_i \quad (6-2)$$

其中

$$v_{i\omega} = \omega R \quad (6-3)$$

联立上式可得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -R \sin \alpha_i \\ 0 & 1 & R \cos \alpha_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i \\ \cos \alpha_i & \sin \alpha_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ v_{ir} \end{pmatrix} \quad (6-4)$$

即

$$\begin{pmatrix} v_{ir} \\ v_{iX} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i \\ \cos \alpha_i & \sin \alpha_i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -R \sin \alpha_i \\ 0 & 1 & R \cos \alpha_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \\ \omega \end{pmatrix} \quad (6-5)$$

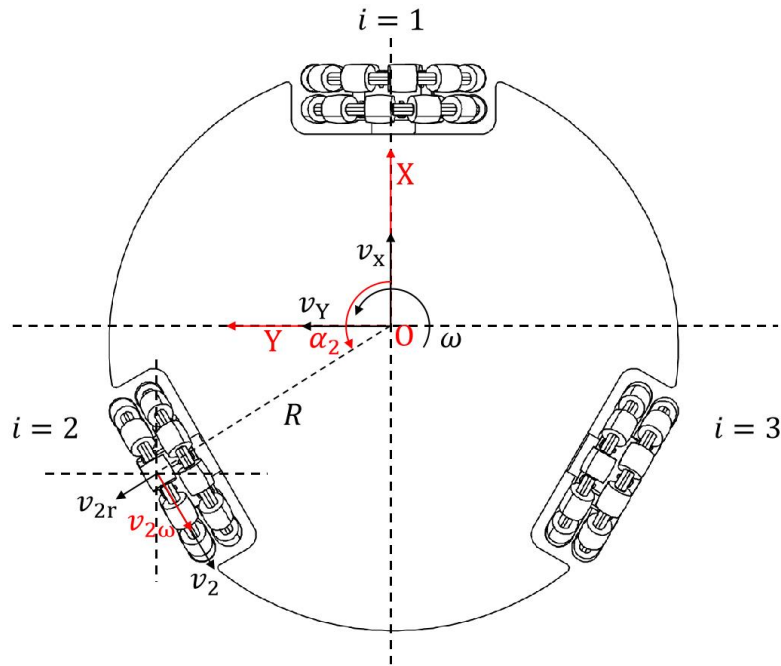


图 6-4 全向轮小车的运动学模型

只关注 v_i 这一项，有 $v_i = -v_X \sin \alpha_i + v_Y \cos \alpha_i + \omega R$ 。那么，对于 3 个车轮 ($i = 1, 2, 3$)，有

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & R \\ -\sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & R \\ -\sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \\ \omega \end{pmatrix} \quad (6-6)$$

通常情况下，参数 α_i 取为

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = \frac{2\pi}{3} \\ \alpha_3 = -\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

则式(6-6)变为

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & R \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & R \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{pmatrix} \quad (6-7)$$

综上，式(6-7)即为全向轮小车的逆运动学方程（在局部坐标系下）。

6.2 正运动学模型

与逆运动学分析相反，正运动学分析是指已知 3 个车轮对应的电机的转速，求解小车的运动状态。令式(6-7)中的系数矩阵为 T ，即

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & R \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & R \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & R \end{pmatrix}$$

则式(6-7)可以写为

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{pmatrix}$$

两边同时左乘 T^{-1} ，可得

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3R} & \frac{1}{3R} & \frac{1}{3R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (6-8)$$

上式即为全向轮小车的正运动学方程（在局部坐标系下）。

7. 应用示例

在实际应用中，不仅仅需要小车在局部坐标系下的运动学方程，很多时候需要的是在全局坐标系下的运动学方程（在定位，路径规划等均有应用），因此，我们需要在全局和局部参考系之间建立一个清楚的映射关系。

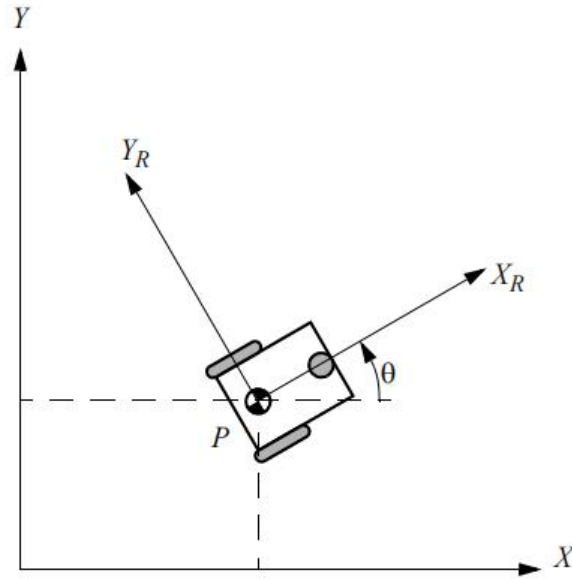


图 7-1 全局坐标系和局部坐标系

为了确定小车在平面中的位置，建立如图 7-1 所示的全局坐标系和局部坐标系，选择底盘上的一点 P 作为它位置的参考点。在全局坐标系下， P 的位置由坐标 x 和 y 确定，全局坐标系和局部坐标系之间的角度差由 θ 给定。那么，小车的姿态可以由向量 $(x \ y \ \theta)^T$ 来描述。由图 7-1 可知，很容易将小车的速度分解到全局坐标系上，也就是说全局坐标系和局部坐标系的关系可以通过正交旋转矩阵来描述。假设在局部坐标系下小车的速度为 $(v_x \ v_y \ \omega)^T$ ，则在全局坐标系下有

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{pmatrix} \quad (7-1)$$

进一步的，如果已知小车的初始位姿 $(x_0 \ y_0 \ \theta_0)^T$ ，那么，在平面上小车任意时刻的位姿可以表示为

$$\begin{cases} x = x_0 + \int_0^t \dot{x} dt \\ y = y_0 + \int_0^t \dot{y} dt \\ \theta = \theta_0 + \int_0^t \dot{\theta} dt \end{cases} \quad (7-2)$$

由式(7-1)和式(7-2)，结合上述的各种类型小车在局部坐标系下的运动学方程即可求得在全局坐标系下的运动学方程。

最后，以一个问题为例简单的介绍运动学方程的应用。考虑这样一个问题：若要求一辆正在左车道正中央匀速行驶（假设行驶速度为 1m/s ）的两轮差速小

车变到相距 1m 的右车道正中央，那么要怎么控制两驱动轮的速度？（这里不做详细的分析，只作为一个抛砖引玉的例子）可以简单的做如下分析：如果没有其它附加要求，我们可以在不改变小车前进速度的前提下，对小车的转向速度进行反馈控制，离目标位置越远，转向速度越大，另一方面，角度偏离正方向越大，转向速度越小（因为变道完成后，小车依然是朝正方向直线行驶）。那么，不妨做如下的控制

$$\dot{\theta} = -k_1(1 - x) + k_2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad (7-3)$$

其中， k_1 和 k_2 是反馈系数，需要自己调试。再将全局坐标系下小车的速度 $(\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\theta})^T$ 变换到局部坐标系下小车的速度 $(v_x \ v_y \ \omega)^T$ 即可实现对两驱动轮速度的控制。下面是在 MATLAB 平台上的仿真程序：

```
clc
clear
close all
W = 0.2; % 轮距
v = 1; % 初始前向速度
theta_dot = 0; % 初始转向速度
x = 0; % 初始位置 (X 方向)
y = 0; % 初始位置 (Y 方向)
theta = pi/2; % 初始姿态
t = 0:0.05:10; % 50ms 控制一次
for i = 1:length(t)
    x_dot = v*cos(theta);
    y_dot = v*sin(theta);
    x = x + x_dot*0.05; % 全局坐标系下的位置 (X 分量)
    y = y + y_dot*0.05; % 全局坐标系下的位置 (Y 分量)
    theta = theta + theta_dot*0.1; % 全局坐标系下的姿态
    theta_dot = -1*(1 - x) - 2*(theta - pi/2);
    % 逆运动学方程 (局部坐标系下)
    omega = theta_dot;
    v_L = v - omega*W/2;
    v_R = v + omega*W/2;
    % 绘制图像
    subplot(2,2,1)
    plot(t(i),v_L,'b. ')
    ylabel('v_L')
    xlabel('Time')
    xlim([0 10]);
    ylim([0.8 1.2]);
    hold on
```

```

grid on
subplot(2,2,3)
plot(t(i),v_R, 'b. ');
ylabel('v_R')
xlabel('Time')
xlim([0 10]);
ylim([0.8 1.2]);
hold on
grid on
subplot(2,2,[2 4])
plot(x,y, 'r. ');
ylabel('Y')
xlabel('X')
line([0.5 0.5], [0 10], 'LineStyle', '--', 'Color', 'k', 'LineWidth', 3)
xlim([-0.5 1.5]);
ylim([0 10])
hold on
pause(0.01)
end

```

运行的结果如下所示：

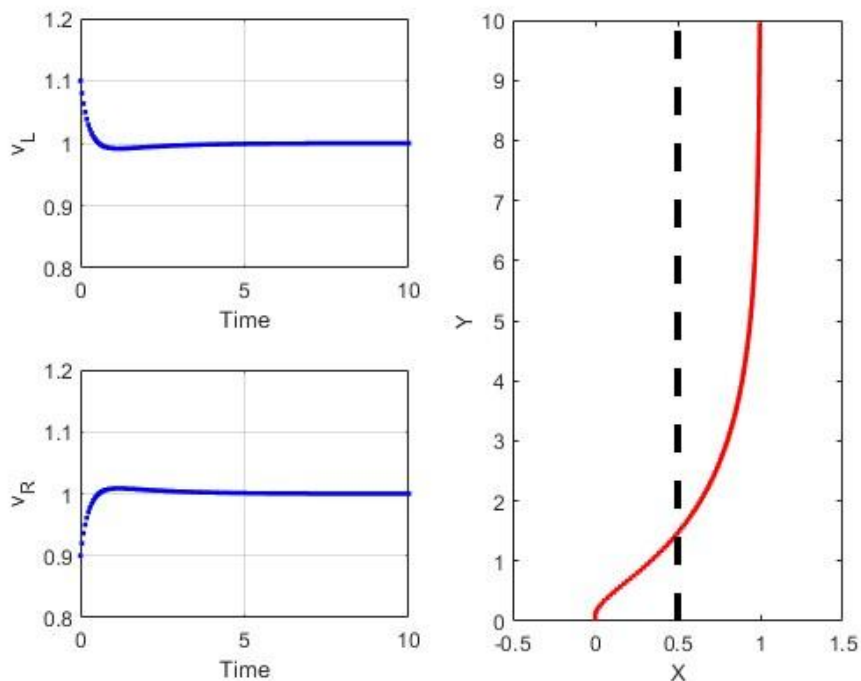


图 7-2 两轮差速小车变道的模拟结果

8. 附录

这一节对阿克曼转向机构做一个补充说明，目前尚没有一种成熟的机构能使内外侧转向轮的转角在全部范围内精确地满足式(3-2)这一理想的关系，只能通过梯形连杆机构或其衍生机构来近似满足。常见的转向机构往往是基于曲柄摇杆机构或者基于曲柄滑块机构设计的，如下图所示。可以看到在整个转向机构中，舵机充当主动件，而关于控制舵机的转动在我们产品中的实现方式有两种：传递 PWM 值直接控制舵机的转动（无滑块位置传感器或基于曲柄摇杆的机构）和传递滑块的位置信息利用增量式 PID 控制 PWM 值的大小进而间接控制舵机的转动（有滑块位置传感器）。下面对两种情况进行说明。

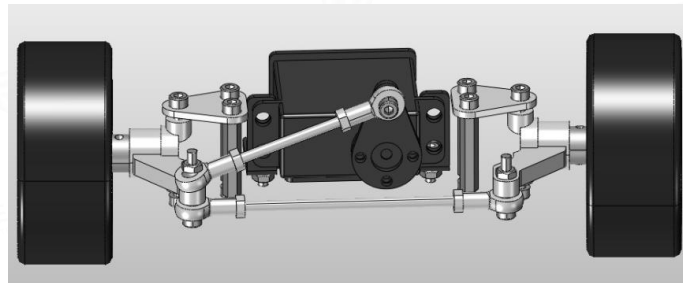


图 8-1 基于曲柄摇杆机构的阿克曼转向机构

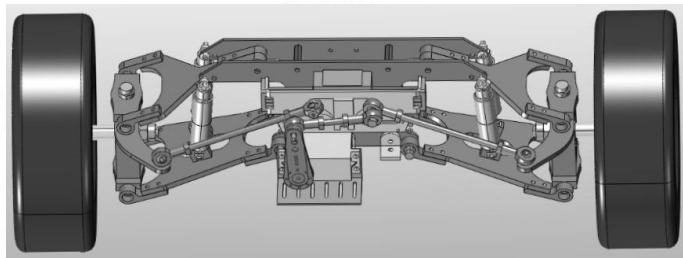


图 8-2 基于曲柄滑块机构的阿克曼转向机构

8.1 关于转向机构（无反馈）

在这种情况下，主要探究舵机的转动角（与 PWM 值一一对应）和小车前轮转向角（以左轮为研究对象）的关系（这里以高配阿克曼小车为例）。首先，根据已知数据（由实验测得）绘制出散点图，如图 8-3 所示。通过观察，不难看出曲线的走势可以用二次曲线或者三次曲线来进行拟合。为了简单起见，可以调用 MATLAB 的曲线拟合工具箱（在 MATLAB 的命令行上输入 `cftool` 即可，至于工具箱的使用请自行学习，这里不再赘述）查看曲线的拟合情况（这里选择三次曲线，因为在避免过拟合的情况下，次数越高，拟合效果越好），如图 8-4 所示。

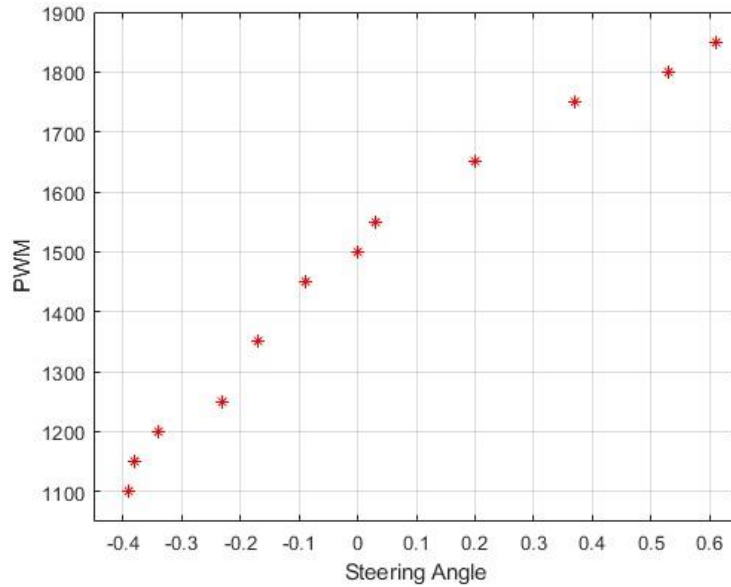


图 8-3 PWM 与转向角的散点图

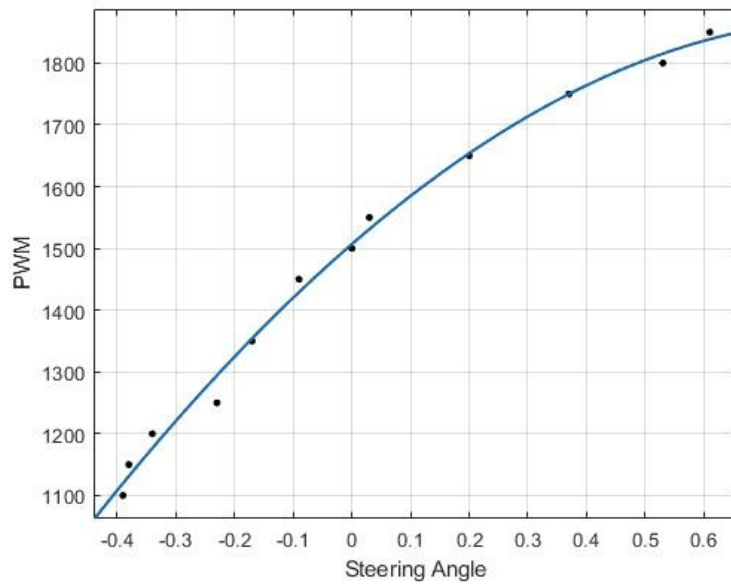


图 8-4 三次曲线的拟合情况

最后，查看拟合的结果，可以看到拟合优度 R^2 比较接近 1，数据拟合的比较好。

线性模型 Poly3:
 $f(x) = p1 \cdot x^3 + p2 \cdot x^2 + p3 \cdot x + p4$
 系数(置信边界为 95%):
 p1 = -27.25 (-723.1, 668.6)
 p2 = -443.1 (-689.4, -196.9)
 p3 = 824.5 (690.7, 958.2)
 p4 = 1507 (1482, 1532)
 拟合优度:
 SSE: 4474
 R 方: 0.994
 调整 R 方: 0.9918
 RMSE: 23.65

图 8-5 三次曲线的拟合结果

8.2 关于转向机构（带反馈）

在这种情况下，由于可以获得滑块的位置信息，因此需要分析前（左）轮转角与滑块位置之间的关系（下面以顶配摆式悬挂阿克曼小车为例），然后利用增量式 PID 控制舵机的转动来达到对滑块位置的闭环控制，进而控制前轮的转角。

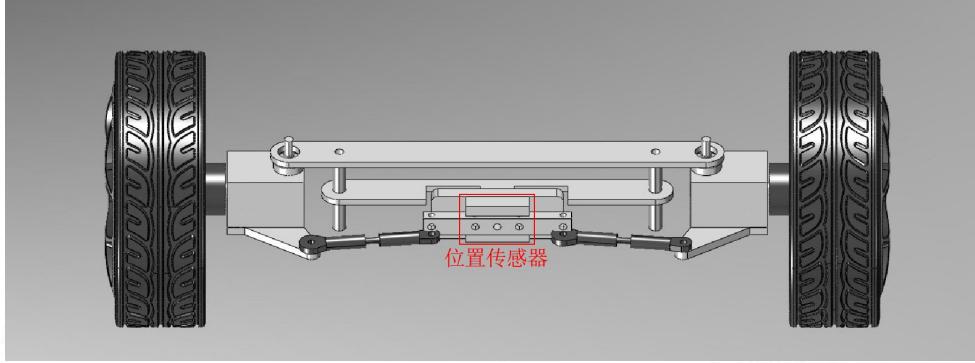


图 8-6 带位置传感器的曲柄滑块机构

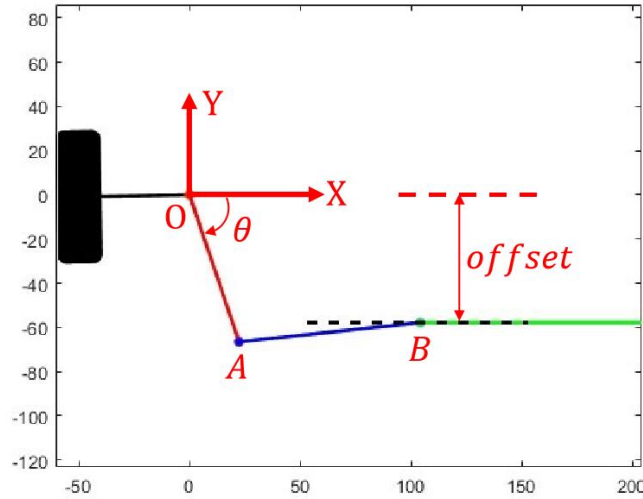


图 8-7 简化后的几何模型

可以将上述机构简化成简单的几何模型，如图 8-7 所示。设

$$\begin{cases} A = (|OA| \cos \theta, |OA| \sin \theta) \\ B = (x_B, -offset) \end{cases} \quad (8-1)$$

由于在整个运动过程中， $|OA|$ 和 $|AB|$ 保持不变，则有

$$(|OA| \cos \theta - x_B)^2 + (|OA| \sin \theta + offset)^2 = |AB|^2 \quad (8-2)$$

若要求左前轮的转角为 $\Delta\theta$ ，则上式可解得（要求 $x_B > 0$ ）

$$\begin{cases} x_B = |OA| \cos \theta + \sqrt{|AB|^2 - (|OA| \sin \theta + offset)^2} \\ \theta = \theta_0 + \Delta\theta \end{cases} \quad (8-3)$$

其中， θ_0 为 θ 的初始值，即当车轮没有转动的时候， θ 的大小。那么，此时滑块的位移为 $\Delta x = x_B - x_0$ ，类似的， x_0 为 x_B 的初始值，即当车轮没有转动的时候， x_B 的大小。只要控制滑块移动设置的距离，就能达到控制车轮转动目标的角度。下面是在 MATLAB 平台上的计算程序：

```
clc
clear
close all
%% 参数
AB = 82.27;
OA = 70.20;
offset = 57.80;
delta_theta = -30:0.5:40;
theta = (delta_theta - 72.39)/180 * pi;
%% 计算
x_B = OA*cos(theta) + sqrt(AB^2 - (OA*sin(theta) + offset).^2);
delta_x = x_B - 103;
figure(1)
plot(delta_theta,delta_x,'r',LineWidth=1.5)
xlabel('车轮的转角(°)')
ylabel('滑块的位移(mm)')
grid on
```

运行的结果如下所示：

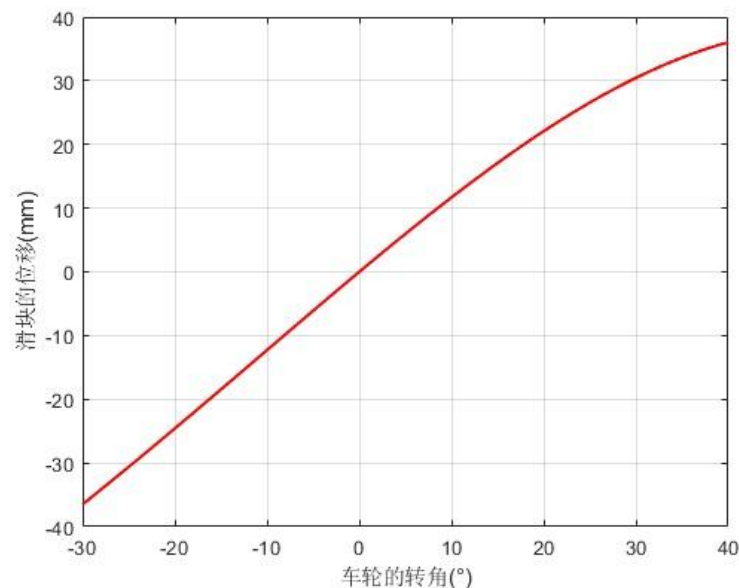


图 8-8 车轮转角与滑块位移的关系